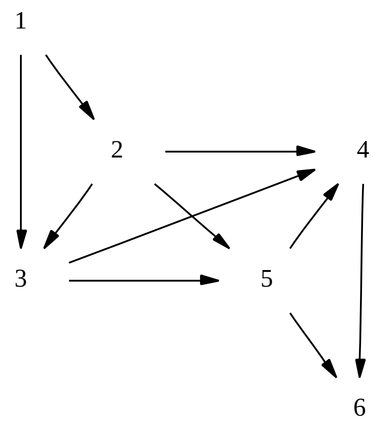
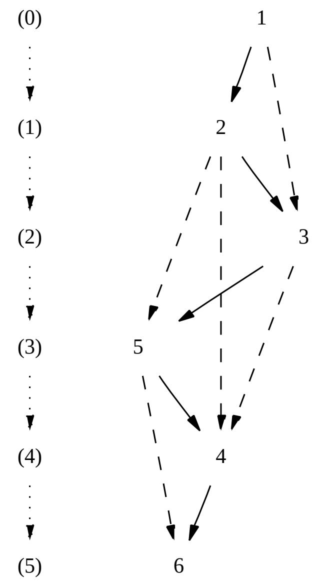
Exercice I.

On considère le graphe orienté G représenté ci-dessous.





1. a. Montrer qu'un sommet et un seul de ce graphe est une racine.

Seul le sommet 1 n'a pas de prédécesseur, le graphe G a donc 1 pour racine unique.

b. Déterminer les niveaux des sommets de ce graphe.

Donner une nouvelle représentation géométrique du graphe qui fait apparaître les différents niveaux.

On rappelle que les racines ont pour niveau 0.

La racine 1 a pour niveau 0, en supprimant le sommet 1 et les arcs qui relient 1 aux autres sommets (2 et 3), le graphe obtenu a pour racine 2 et donc 2 a pour niveau 1. En supprimant le sommet 2 et les arcs d'origine 2, le graphe obtenu a pour racine 3 et donc 3 a pour niveau 2, de même on voit ensuite que 5 a pour niveau 3, que 4 a pour niveau 4 et enfin que 6 a pour niveau 5.

Le tableau suivant donne les sommets classés suivant leur niveau :

niveau	0	1	2	3	4	5
sommet	1	2	3	5	4	6

La seconde figure donne une nouvelle représentation géométrique du graphe qui fait apparaître les niveaux de (0) à (5), sur la gauche de la figure.

2. Écrire la matrice d'adjacence M associée à ce graphe.

On rappelle que les numéros des sommets de départ sont les rangs des lignes et les numéros des sommets d'arrivée sont les rangs des colonnes de cette matrice booléenne M.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Calculer M^2, M^3, M^4 et M^5.

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; M^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Le coefficient situé à l'intersection de la 1^{re} ligne et de la 6^{me} colonne de la matrice M^3 est égal à 4. Donner l'interprétation de ce nombre.

Le nombre 4 situé à l'intersection de la 1^{re} ligne et de la 6^{me} colonne de la matrice M^3 correspond au nombre de chemins de longueur 3 (de 3 arcs et 4 sommets), dont l'extrémité initiale est le sommet 1 et dont l'extrémité terminale est le sommet 6.

Vérifier ce résultat en énumérant les chemins correspondants.

Les 4 chemins de longueur 3 qui partent de 1 et se terminent au sommet 6 sont : $(1, 2, 4, 6)$, $(1, 2, 5, 6)$, $(1, 3, 4, 6)$ et $(1, 3, 5, 6)$.

5. En utilisant l'un des résultats de la question 2.
montrer qu'il existe un chemin hamiltonien et un seul dans ce graphe.
Décrire ce chemin hamiltonien.
On rappelle qu'un chemin hamiltonien est un chemin qui passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe.

S'il existe, un chemin hamiltonien passe une fois et une seule par les 6 sommets du graphe, le nombre d'arcs utilisés est 5. Ce chemin hamiltonien est donc répertorié dans la matrice M^5.
Il existe un seul tel chemin de longueur 5. S'il passe par tous les sommets, il est hamiltonien. Ce chemin est $(1, 2, 3, 5, 4, 6)$ (en traits continus sur la figure de droite), il est bien hamiltonien.
(On peut aussi dire que tout chemin hamiltonien part nécessairement du sommet 0 pour arriver au niveau 5).

6. a. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 6, la matrice M^n est nulle.

En notant 0 la matrice carrée nulle de 6 lignes et de 6 colonnes, on a $M^6 = 0$ et donc :
Si $n > 6$, $M^n = M^6 \times M^{n-6} = 0 \times M^{n-6} = 0$.

Donner l'interprétation de ce résultat.

Tout chemin est de longueur 5 au plus (de 6 sommets au plus).

b. Déterminer la matrice $\widehat{M}$ de la fermeture transitive $\widehat{G}$ du graphe G.

Comme M^n est nulle pour tout $n \geq 6$, on a aussi $M^{[n]}$ nulle pour tout $n \geq 6$ et donc :
$\widehat{M} = M \boxplus M^{[2]} \boxplus M^{[3]} \boxplus M^{[4]} \boxplus M^{[5]}$.
Il suffit de calculer $M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5$ et de remplacer les éléments non nuls par des 1.

$$\mathrm{M} + \mathrm{M}^2 + \mathrm{M}^3 + \mathrm{M}^4 + \mathrm{M}^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \widehat{\mathrm{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice II.

Une entreprise fabrique des appareils de trois types différents : (L), (C) et (V).
Pour un appareil de type (L), on a besoin de 10 kg d'acier, 2 kg de peinture et 10 heures de travail.
Pour un appareil de type (C), il faut 4 kg d'acier, 1 kg de peinture et 6 heures de travail.
Pour un appareil de type (V), il faut 10 kg d'acier, 1 kg de peinture et 12 heures de travail.

On appelle respectivement x, y et z les quantités d'appareils de type (L), (C) et (V) fabriqués, et a, p, t les quantités d'acier (en kg), de peinture (en kg) et de travail (en heures) nécessaires pour leur fabrication.

1. On considère les matrices :

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 12 \end{bmatrix}, \ \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ \mathrm{Y} = \begin{bmatrix} a \\ p \\ t \end{bmatrix}.$$

<u>Montrer que $Y = MX$.</u>
En calculant la quantité a d'acier, p de peinture et la dutée t du travail en fonction des nombres x, y, z d'appareils des trois types, on obtient le système de trois équations

$$\begin{aligned} a &= 10\,x + \ 4\,y + 10\,z && (1) \\ p &= \ 2\,x + \ \ y + \ \ z && (2) \\ t &= 10\,x + \ 6\,y + 12\,z && (3) \\ & && (4) \end{aligned}$$

dont l'écriture matricielle est

$$\begin{bmatrix} a \\ p \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

soit encore $Y = MX$.

2. On donne la matrice :

$$\mathrm{M}' = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -7 & 10 & 5 \\ 1 & -10 & 1 \end{bmatrix}.$$

<u>Calculer le produit $M'\,M$.</u>

$M'\,M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donc la matrice M est inversible et M' est la matrice inverse de M, $(M' = M^{-1})$.

<u>En déduire la matrice X en fonction des matrices M' et Y.</u>
le système $Y = MX$ se transforme en $M^{-1}Y = M^{-1}MX$ et donc $M^{-1}Y = X$.

3. <u>En déduire les quantités d'appareils de chaque type (L), (C) et (V) fabriqués en un mois</u> sachant que $4\,200$ kg d'acier, 800 kg de peinture et $5\,000$ heures de travail ont été nécessaires. On a $a = 4\,200$, $p = 800$ et

$t = 5\,000$, d'où $Y = \begin{bmatrix} 4\,200 \\ 800 \\ 5\,000 \end{bmatrix}$

et donc $X = M'\,Y$ donne $X = \dfrac{1}{12}\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -7 & 10 & 5 \\ 1 & -10 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4\,200 \\ 800 \\ 5\,000 \end{bmatrix}$

Enfin un calcul donne $X = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix}$.

Chaque mois sont fabriqués 200 appareils de type (L), 300 de type (C) et 100 de type (V).

Exercice III.

La question 1. est indépendante des questions suivantes.

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(\text{O}; \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique 2 cm).
On note E le point de coordonnées $(\ln 2,\ \ln 2)$.

1. Soient a et b deux nombres réels ; on désigne par g la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = ax + b - \frac{4\,e^x}{e^x + 2}.$$

a. Calculer la dérivée de g.

$$g'(x) = a - 4\,\frac{e^x(e^x+2) - e^x\,e^x}{(e^x+2)^2} = a - 4\,e^x\,\frac{e^x + 2 - e^x}{(e^x+2)^2} = a - \frac{8\,e^x}{(e^x+2)^2}.$$

b. Déterminer a et b pour que la courbe représentative de g passe par le point E et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

La tangente en E est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $g'(\ln 2) = 0$, ce qui donne $a - \frac{16}{(2+2)^2} = 0$ ou encore $a = 1$.
La courbe représentative de g passe par le point E et donc $g(\ln 2) = \ln 2$, soit $\ln 2 = a\ln 2 + b - \frac{4\times 2}{2+2}$; $\ln 2 = \ln 2 + b - 2$; on obtient ainsi $b = 2$.

$$g(x) = x + 2 - \frac{4\,e^x}{e^x+2};\ \ g'(x) = 1 - \frac{8\,e^x}{(e^x+2)^2}.$$

2. On se propose d'étudier la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4\,e^x}{e^x+2}.$$

a. Montrer que pour tout nombre réel x, $f(x) = x - 2 + \dfrac{8}{e^x+2}$.

$$x-2+\frac{8}{e^x+2} = x+2-4+\frac{8}{e^x+2} = x+2+\frac{-4(e^x+2)+8}{e^x+2} = x+2+\frac{-4\,e^x}{e^x+2} = x+2-\frac{4\,e^x}{e^x+2} = f(x).$$

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4\,e^x}{e^x+2} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 2 - \dfrac{4\,e^x}{e^x+2} = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8}{e^x+2} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 2 + \dfrac{8}{e^x+2} = +\infty$.

c. Montrer que les droites D_1 d'équation $y = x - 2$ et D_2 d'équation $y = x + 2$ sont asymptotes à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le plan P.

Comme $f(x) = x - 2 + \dfrac{8}{e^x + 2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8}{e^x + 2} = 0$, on peut dire que la droite D_1 d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
Comme $f(x) = x + 2 - \dfrac{4\,e^x}{e^x + 2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4\,e^x}{e^x + 2} = 0$, on peut dire que la droite D_2 d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

Préciser la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à chacune de ces deux droites D_1 et D_2.

$f(x) = x - 2 + \dfrac{8}{e^x + 2}$ et pour tout x, e^x et donc aussi $\dfrac{8}{e^x + 2}$ sont strictement positifs, la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'asymptote D_1 d'équation $y = x - 2$.
$f(x) = x + 2 - \dfrac{4\,e^x}{e^x + 2}$ et pour tout x, e^x et donc aussi $\dfrac{4\,e^x}{e^x + 2}$ sont strictement positifs, la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = x + 2 - \dfrac{4\,e^x}{e^x + 2}$ est au-dessous de l'asymptote D_2 d'équation $y = x + 2$.

3. a. Calculer la dérivée f' de f, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de f.

$f'(x) = 1 - \dfrac{8\,e^x}{(e^x + 2)^2}$ (même calcul que pour $g'(x)$).

$$f'(x) = \frac{(e^x + 2)^2 - 8e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^{2x} + 4\,e^x + 4 - 8e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^{2x} - 4\,e^x + 4}{(e^x + 2)^2} = \frac{(e^x - 2)^2}{(e^x + 2)^2}.$$

On en déduit que $f'(x) = 0$ si et seulement si $e^x - 2 = 0$, c.-à-d. si et seulement si $x = \ln 2$.
Comme numérateur et dénominateur de $f'(x)$ sont des carrés, pour tout x, $f'(x) \geq 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $f'(x)$ est strictement positive, sauf en $x = \ln 2$ où elle s'annule, la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;\ +\infty[$.

b. Construire dans le plan P la courbe $\mathcal{C}$, sa tangente en E et ses asymptotes.

4. a. Soit la fonction h définie pour tout nombre réel x par $h(x) = \ln(e^x + 2)$.
Calculer la dérivée h' de h.

$h(x) = \ln(e^x + 2)$ donc $h'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 2}$.

b. Déduire du résultat précédent une primitive G de la fonction f.

Une primitive de $\dfrac{e^x}{e^x + 2}$ est $\ln(e^x + 2)$ donc $f(x) = x + 2 - \dfrac{4\,e^x}{e^x + 2}$ a pour primitive
$\mathrm{G}(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2\,x - 4\ln(e^x + 2)$.

c. Déterminer la primitive F de la fonction f qui vérifie $\mathrm{F}(\ln 2) = 0$.

$\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(\ln 2) + \mathrm{F}(\ln 2)$ d'où
$\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2\,x - 4\ln(e^x + 2) - \mathrm{G}(\ln 2)$,
$\mathrm{G}(\ln 2) = \dfrac{(\ln 2)^2}{2} + 2\,\ln 2 - 4\ln(2 + 2) = \dfrac{(\ln 2)^2}{2} + 2\,\ln 2 - 8\ln 2 = \dfrac{(\ln 2)^2}{2} - 6\ln 2$.
$\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2\,x - 4\ln(e^x + 2) - \dfrac{(\ln 2)^2}{2} + 6\ln 2$.

d. Calculer $\mathrm{J} = \displaystyle\int_{\ln 2}^{2\,\ln 2} f(x)dx$ puis donner une valeur approchée de J à 10^{-3} près.

$$\mathrm{J} = \int_{\ln 2}^{2\,\ln 2} f(x)dx = \mathrm{F}(2\ln 2) - \mathrm{F}(\ln 2) = \mathrm{F}(2\ln 2)$$

car $\mathrm{F}(x)$ est la primitive de $f(x)$ telle que $\mathrm{F}(\ln 2) = 0$.

$\mathrm{J} = \mathrm{F}(2\ln 2) = \dfrac{4(\ln 2)^2}{2} + 4\ \ln 2 - 4\ln(4+2) - \dfrac{(\ln 2)^2}{2} + 6\ \ln 2 = \dfrac{3(\ln 2)^2}{2} + 4\ \ln 2 - 4\ln(2) - 4\ln(3) +$
$6\ \ln 2$

$$\mathrm{J} = \frac{3}{2}(\ln 2)^2 + 6\ \ln 2 - 4\ln(3).$$

La calculatrice donne $\mathrm{J} \approx 0,4851134493$ donc $\mathrm{J} = 0,485$ à 10^{-3} près.