Fonction d'Ackerman

0.1 Définition de la fonction d'Ackerman

Définition 0.1 *La fonction d'Ackerman $A(m,n)$ est définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par :*

$$A(m,n) = \begin{cases} A(0,n) = n+1 & \textit{si } m = 0 \\ A(m,0) = A(m-1,1) & \textit{si } n = 0 \\ A(m,n) = A(m-1, A(m,n-1)) & \textit{si } m \neq 0 \textit{ et } n \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

0.2 Formules de récurrences

Suites des valeurs de la fonction d'Ackerman $A(m,n)$ obrenues en fixant le premier m et en faisant varier n.

Propriété 0.2 *La fonction d'Ackerman $A(m,n)$, définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, vérifie les relations suivantes :*

$$\begin{cases} A(0,n) = n+1 & \textit{si } m = 0 \\ A(1,n) = n+2 & \textit{si } m = 1 \\ A(2,n) = 2\,n+3 & \textit{si } m = 2 \\ A(3,n) = 2^{n+3} - 3 & \textit{si } m = 3 \\ A(4,n) = 2^{2^{\cdots^{2^{16}}}} - 3 & \textit{si } m = 4 \end{cases} \tag{2}$$

1. D'après la définition $A(0,n) = n+1$. La suite est arithmétique.

2. le premier terme est $A(1,0) = A(0,1) = 2$.
par ailleurs, si $m > 0$ et $n > 0$, on a $A(1,n) = A(0, A(1,n-1)) = A(1,n-1)+1$.
Comme $A(1,0) = 2$ et $A(1,n) = A(1,n-1)+1$.
La suite est arithmétique de premier terme 2 et de raison 1.
On a donc $A(1,n) = n+2$.

3. La formule $A(2,n) = 2\,n+3$ donne la valeur exacte $A(2,0) = 3$, en effet $A(2,0) = A(1,1) = 1+2 = 3$.
Cette formule est vraie lorsque $n = 1$ car $A(2,0) = A(1,1) = 1+2 = 3$.
On suppose la formule vraie au rang $n-1$, on en déduit au rang n que $A(2,n) = A(1, A(2,n-1)) = A(1, 2(n-1)+3) = A(1, 2n+1) = 2n+1+2 = 2n+3$, ce qui prouve la formule pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite est arithmétique.

4. La formule $A(3,n) = 2^{n+3} - 3$ donne la valeur $A(3,0) = 2^3 - 3 = 5$, valeur exacte car $A(3,0) = A(2,1) = 2 \times 1 + 3 = 5$.
On suppose que la formule est vraie jusqu'au rang $n-1$, $A(3,n) = A(2, A(3,n-1)) = 2 * A(3,n-1) + 3 = 2 \times (2^{n+1} - 3) + 3 = 2^{n+2} - 6 + 3 = 2^{n+2} - 3$. La formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite est la somme d'une suite géométrique de raison 2 et de la constante -3.

5. La formule $A(4,n) = 2^{2^{\cdots^{2^{16}}}} - 3$ donne pour $n = 0$ la valeur exacte $A(4,0) = 16 - 3 = 13$ (pas de puissance), ainsi que pour $n = 1$, $A(4,1) = 2^16 - 3 = 65336 - 3 = 65333$ (une puissance). En effet $A(4,0) = 13$ et $A(4,1) = A(3, A(4,0)) = A(3, A(3,1)) = A(3,13) = 2^16 - 3 = 65333$.
On suppose la formule vraie jusqu'au rang $n-1$. $A(4,n) = A(3, A(4,n-1)) = 2^{A(4,n-1)+3} - 3 = 2^{2^{\cdots^{2^{16}}} - 3 + 3} - 3 = 2^{2^{\cdots^{2^{16}}}} - 3$. La formule est donc vraie pour tout naturel n.
Le nombre d'exponentiations dans $A(4,n) = 2^{2^{\cdots^{2^{16}}}} - 3$ est n, pour $n = 0$ $n = 0$ on a seulement

$A(4,0) = 16 - 3 = 13$, ensuite $A(4,1) = 2^{16} - 3$, $A(4,2) = 2^{2^{16}} - 3$, $A(4,3) = 2^{2^{2^{16}}} - 3 \dots$
Autre forme : $A(4,n) = 2^{2^{\cdots 2^2}} - 3$ avec $n+3$ chiffres 2 dans cette écriture.

6. $A(5,n) = A(4, A(5, n-1)) = 2^{2^{\cdots 2^2}} - 3$ avec $A(5, n-1) + 3 = 2^{2^{\cdots 2^2}}$ chiffres 2 !